Análisis de Algoritmos III

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Maestría en Ciencias de la Computación
Análisis y Diseño de Algoritmos
MCOM 20300

Contenido

Motivación

- La solución de una recurrencia lineal con coeficientes constantes se vuelve más difícil cuando la recurrencia no es homogénea, es decir, cuando la combinación lineal no es igual a cero.

Motivación

- En particular, ya no es cierto que cualquier combinación lineal de soluciones sea una solución.

Recurrencias no homogéneas

Empezamos con un caso sencillo. Considere la siguiente recurrencia.

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b^n p(n) \tag{1}$$

El lado izquierdo es el mismo que antes, pero en el lado derecho tenemos $b^n p(n)$, donde

- b es una constante y
- $p(n)$ es un polinomio en n de grado d.

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1

Considere la recurrencia

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n. \tag{2}$$

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1

Considere la recurrencia

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n. \tag{2}$$

En este caso, $b = 3$ y $p(n) = 1$, un polinomio de grado 0.

Ejemplo 1 I

Ejemplo 1

Considere la recurrencia

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n. \tag{2}$$

En este caso, $b = 3$ y $p(n) = 1$, un polinomio de grado 0.
Un poco de astucia nos permite reducir este ejemplo al caso homogéneo que conocemos.

Ejemplo 1

Considere la recurrencia

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n. \tag{2}$$

En este caso, $b = 3$ y $p(n) = 1$, un polinomio de grado 0.
Un poco de astucia nos permite reducir este ejemplo al caso homogéneo que conocemos.
Para ver esto, primero multiplique la recurrencia por -3, obteniendo

$$-3t_n + 6t_{n-1} = -3^{n+1}.$$

Ejemplo 1

Considere la recurrencia

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n. \tag{2}$$

En este caso, $b = 3$ y $p(n) = 1$, un polinomio de grado 0.
Un poco de astucia nos permite reducir este ejemplo al caso homogéneo que conocemos.
Para ver esto, primero multiplique la recurrencia por -3, obteniendo

$$-3t_n + 6t_{n-1} = -3^{n+1}.$$

Ahora reemplace n por $n-1$ en esta recurrencia para obtener

$$-3t_{n-1} + 6t_{n-2} = -3^n. \tag{3}$$

Ejemplo 1 II

Finalmente, si sumamos (2) y (3) tenemos

Ejemplo 1 II

Finalmente, si sumamos (2) y (3) tenemos

$$t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0. \tag{4}$$

Ejemplo 1 II

Finalmente, si sumamos (2) y (3) tenemos

$$t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0. \tag{4}$$

la cual se puede resolver por el método visto en la sesión anterior. El polinomio característico es

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Ejemplo 1 II

Finalmente, si sumamos (2) y (3) tenemos

$$t_n - 5t_{n-1} + 6t_{n-2} = 0. \tag{4}$$

la cual se puede resolver por el método visto en la sesión anterior. El polinomio característico es

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

y por lo tanto todas las soluciones son de la forma

$$t_n = c_1 2^n + c_2 3^n. \tag{5}$$

Ejemplo 1 III

- Sin embargo, ya no es cierto que una elección arbitraria de las constantes c_1 y c_2 en la ecuación (5) produzca una solución a la recurrencia incluso cuando no se tengan en cuenta las condiciones iniciales.

Ejemplo 1 III

- Peor: incluso las soluciones básicas $t_n = 2^n$ y $t_n = 3^n$, que son por supuesto soluciones a la ecuación (4), no son soluciones a la recurrencia original dada por la ecuación (2). ¿Qué está pasando?

Ejemplo 1 III

- La explicación es que las ecuaciones (2) y (4) no son equivalentes: la ecuación (4) se puede resolver dando valores arbitrarios para t_0 y t_1 (las condiciones iniciales), mientras que nuestra ecuación (2) original implica que $t_1 = 2t_0 + 3$.

La solución general de la la recurrencia original se puede determinar como una función de t_0 resolviendo dos ecuaciones lineales con incógnitas c_1 y c_2.

Ejemplo 1 IV

La solución general de la la recurrencia original se puede determinar como una función de t_0 resolviendo dos ecuaciones lineales con incógnitas c_1 y c_2.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= t_0 & \qquad n &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 2t_0 + 3 & \qquad n &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Ejemplo 1 IV

La solución general de la la recurrencia original se puede determinar como una función de t_0 resolviendo dos ecuaciones lineales con incógnitas c_1 y c_2.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= t_0 & n &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 2t_0 + 3 & n &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Solucionándolas obtenemos que $c_1 = t_0 - 3$ y $c_2 = 3$. Por lo tanto, la solución general es

$$t_n = (t_0 - 3)2^n + 3^{n+1}$$

Ejemplo 1 IV

La solución general de la la recurrencia original se puede determinar como una función de t_0 resolviendo dos ecuaciones lineales con incógnitas c_1 y c_2.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= t_0 & \quad n &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 2t_0 + 3 & \quad n &= 1 \end{aligned} \tag{6}$$

Solucionándolas obtenemos que $c_1 = t_0 - 3$ y $c_2 = 3$. Por lo tanto, la solución general es

$$t_n = (t_0 - 3)2^n + 3^{n+1}$$

y así $t_n \in \Theta(3^n)$ independientemente de la condición inicial.

Ejemplo 1 V

- Siempre que $t_0 \geq 0$, una demostración fácil por inducción matemática basada en la Ecuación (2) muestra que $t_n \geq 0$ para todo $n \geq 0$.

Ejemplo 1 V

- Por lo tanto, es inmediato de la Ecuación (5) que $t_n \in O(3^n)$: no hay necesidad de resolver las constantes c_1 y c_2 para llegar a esta conclusión.

Ejemplo 1 V

- Sin embargo, esta ecuación por sí sola no es suficiente para concluir que $t_n \in \Theta(3^n)$ porque podría haber sido a priori que $c_2 = 0$.

Ejemplo 1 V

- No obstante, resulta que el valor de c_2 se puede obtener directamente, sin necesidad de establecer el sistema de ecuaciones lineales (6).

Ejemplo 1 VI

- Esto es suficiente para concluir que $t_n \in \Theta(3^n)$ cualquiera que sea el valor de t_0 (incluso si es negativo).

Ejemplo 1 VI

- Para ver esto, sustituya la Ecuación (5) en la recurrencia original.

$$\begin{aligned} 3^n &= t_n - 2t_{n-1} \\ &= (c_1 2^n + c_2 3^n) - 2(c_1 2^{n-1} + c_2 3^{n-1}) \\ &= c_2 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Independientemente de la condición inicial, concluimos que $c_2 = 3$.

Ejemplo 1 VI

- En los ejemplos que siguen, a veces establecemos un sistema de ecuaciones lineales para determinar todas las constantes que aparecen en la solución general, mientras que en otras ocasiones determinamos solo las constantes necesarias sustituyendo la solución general en la recurrencia original.

Ejemplo 2 I

Ejemplo 2

Deseamos encontrar la solución general de la siguiente recurrencia.

$$t_n - 2t_{n-1} = (n+5)3^n, n \geq 1. \tag{7}$$

Ejemplo 2 I

Ejemplo 2

Deseamos encontrar la solución general de la siguiente recurrencia.

$$t_n - 2t_{n-1} = (n+5)3^n, n \geq 1. \qquad (7)$$

La manipulación necesaria para transformarla en una recurrencia homogénea es ligeramente más complicada que con el Ejemplo 1. Debemos

Ejemplo 2 I

Ejemplo 2

Deseamos encontrar la solución general de la siguiente recurrencia.

$$t_n - 2t_{n-1} = (n+5)3^n, n \geq 1. \qquad (7)$$

La manipulación necesaria para transformarla en una recurrencia homogénea es ligeramente más complicada que con el Ejemplo 1. Debemos

1. escribir la recurrencia (7),

Ejemplo 2

Deseamos encontrar la solución general de la siguiente recurrencia.

$$t_n - 2t_{n-1} = (n+5)3^n, n \geq 1. \tag{7}$$

La manipulación necesaria para transformarla en una recurrencia homogénea es ligeramente más complicada que con el Ejemplo 1. Debemos

1. escribir la recurrencia (7),
2. reemplazar n en la recurrencia (7) por $n-1$ y multiplicar por -6 y

Ejemplo 2 I

Ejemplo 2

Deseamos encontrar la solución general de la siguiente recurrencia.

$$t_n - 2t_{n-1} = (n+5)3^n, n \geq 1. \tag{7}$$

La manipulación necesaria para transformarla en una recurrencia homogénea es ligeramente más complicada que con el Ejemplo 1. Debemos

1. escribir la recurrencia (7),
2. reemplazar n en la recurrencia (7) por $n-1$ y multiplicar por -6 y
3. reemplazar n en la recurrencia (7) por $n-2$ y multiplicar por 9.

Ejemplo 2 II

Así obtenemos:

$$
\begin{aligned}
t_n - 2t_{n-1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= (n+5)3^n \\
- 6t_{n-1} \qquad +12t_{n-2} \qquad\qquad\qquad &= -6(n+4)3^{n-1} \\
9t_{n-2} - 18t_{n-3} &= 9(n+3)3^{n-2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2 II

Así obtenemos:

$$
\begin{aligned}
t_n - 2t_{n-1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= (n+5)3^n \\
- 6t_{n-1} \qquad +12t_{n-2} \qquad\qquad\qquad\qquad &= -6(n+4)3^{n-1} \\
9t_{n-2} - 18t_{n-3} \qquad &= 9(n+3)3^{n-2}
\end{aligned}
$$

Sumando estas tres ecuaciones obtenemos una recurrencia homogénea

$$t_n - 8t_{n-1} + 21t_{n-2} - 18t_{n-3} = 0.$$

Ejemplo 2 II

Así obtenemos:

$$\begin{aligned}
t_n - 2t_{n-1} & & &= (n+5)3^n \\
- 6t_{n-1} & + 12t_{n-2} & &= -6(n+4)3^{n-1} \\
& 9t_{n-2} & - 18t_{n-3} &= 9(n+3)3^{n-2}
\end{aligned}$$

Sumando estas tres ecuaciones obtenemos una recurrencia homogénea

$$t_n - 8t_{n-1} + 21t_{n-2} - 18t_{n-3} = 0.$$

Su polinomio característico es

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x-2)(x-3)^2$$

Ejemplo 2 II

Así obtenemos:

$$\begin{aligned} t_n - 2t_{n-1} & & &= (n+5)3^n \\ -6t_{n-1} & +12t_{n-2} & &= -6(n+4)3^{n-1} \\ & 9t_{n-2} & -18t_{n-3} &= 9(n+3)3^{n-2} \end{aligned}$$

Sumando estas tres ecuaciones obtenemos una recurrencia homogénea

$$t_n - 8t_{n-1} + 21t_{n-2} - 18t_{n-3} = 0.$$

Su polinomio característico es

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x-2)(x-3)^2$$

y por lo tanto todas las soluciones son de la forma

$$t_n = c_1 2^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n. \tag{8}$$

Ejemplo 2 III

Una vez más, cualquier elección de valores para las constantes c_1, c_2 y c_3 en la Ecuación (8) proporciona una solución a la recurrencia homogénea, pero la recurrencia original impone restricciones a estas constantes porque requiere que $t_1 = 2t_0 + 18$ y $t_2 = 2t_1 + 63 = 4t_0 + 99$.

Ejemplo 2 III

Por lo tanto, la solución general se encuentra resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= t_0 & n &= 0 \\
2c_1 + 3c_2 + 3c_3 &= 2t_0 + 18 & n &= 1 \\
4c_1 + 9c_2 + 18c_3 &= 4t_0 + 99 & n &= 2
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2 III

Esto implica que $c_1 = t_0 - 9, c_2 = 9$ y $c_3 = 3$. Por lo tanto, la solución general a la Ecuación 7 es $t_n = (t_0 - 9)2^n + (n+3)3^{n+1}$ y así $t_n \in \Theta(n3^n)$ independientemente de la condición inicial.

Ejemplo 2 IV

- Alternativamente, podemos sustituir la Ecuación 8 en la recurrencia original.

Ejemplo 2 IV

- Alternativamente, podemos sustituir la Ecuación 8 en la recurrencia original.
- Después de una simple manipulación, obtenemos

$$(n+5)3^n = c_3 n 3^{n-1} + (2c_3 + c_2)3^{n-1}.$$

Ejemplo 2 IV

- Alternativamente, podemos sustituir la Ecuación 8 en la recurrencia original.
- Después de una simple manipulación, obtenemos

$$(n+5)3^n = c_3 n 3^{n-1} + (2c_3 + c_2)3^{n-1}.$$

- Igualando los coeficientes de $n3^n$ obtenemos que $c_3 = 3$.

Ejemplo 2 IV

- Alternativamente, podemos sustituir la Ecuación 8 en la recurrencia original.
- Después de una simple manipulación, obtenemos

$$(n+5)3^n = c_3 n 3^{n-1} + (2c_3 + c_2)3^{n-1}.$$

- Igualando los coeficientes de $n3^n$ obtenemos que $c_3 = 3$.
- El hecho de que c_3 es estrictamente positivo es suficiente para establecer el orden exacto de t_n, sin necesidad de resolver las otras constantes.

Ejemplo 2 IV

- Alternativamente, podemos sustituir la Ecuación 8 en la recurrencia original.
- Después de una simple manipulación, obtenemos

$$(n+5)3^n = c_3 n 3^{n-1} + (2c_3 + c_2)3^{n-1}.$$

- Igualando los coeficientes de $n3^n$ obtenemos que $c_3 = 3$.
- El hecho de que c_3 es estrictamente positivo es suficiente para establecer el orden exacto de t_n, sin necesidad de resolver las otras constantes.
- No obstante, ya que se conoce c_3, el valor de c_2 es fácil de obtener igualando los coeficientes de 3^n, así $c_2 = 9$.

Después de la tormenta . . . I

- Mirando hacia atrás en los Ejemplos 1 y 2, vemos que parte del polinomio característico proviene del lado izquierdo de la Ecuación 4.10 y el resto del lado derecho.

- La parte que viene del lado izquierdo es exactamente como si la ecuación hubiera sido homogénea: $(x - 2)$ para ambos ejemplos.

Después de la tormenta . . . I

- La parte que viene del lado derecho es el resultado de nuestra manipulación.

- Generalizando, podemos demostrar que para resolver la Ecuación 1 es suficiente usar el siguiente polinomio característico.

$$(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \cdots + a_k)(x - b)^{d+1}$$

Después de la tormenta . . . II

- Recuerde que d es el grado del polinomio $p(n)$.

Después de la tormenta . . . II

- Una vez obtenido este polinomio, proceda como en el caso homogéneo, excepto que algunas de las ecuaciones necesarias para determinar las constantes no se obtienen de las condiciones iniciales sino de la recurrencia en sí.

Ejemplo 3 I

Ejemplo 3

El número de movimientos requeridos por un anillo en el problema de las Torres de Hanoi es

$$t(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ 2t(m-1)+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 3

El número de movimientos requeridos por un anillo en el problema de las Torres de Hanoi es

$$t(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ 2t(m-1)+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esto se puede reescribir como

$$t(m) - 2t(m-1) = 1, \tag{9}$$

Ejemplo 3 I

Ejemplo 3

El número de movimientos requeridos por un anillo en el problema de las Torres de Hanoi es

$$t(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ 2t(m-1) + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esto se puede reescribir como

$$t(m) - 2t(m-1) = 1, \tag{9}$$

la cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 1$ y $p(n) = 1$, un polinomio de grado 0.

Ejemplo 3

El número de movimientos requeridos por un anillo en el problema de las Torres de Hanoi es

$$t(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ 2t(m-1) + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esto se puede reescribir como

$$t(m) - 2t(m-1) = 1, \tag{9}$$

la cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 1$ y $p(n) = 1$, un polinomio de grado 0. Por lo tanto su polinomio característico es

$$(x-2)(x-1)$$

Ejemplo 3 I

Ejemplo 3

El número de movimientos requeridos por un anillo en el problema de las Torres de Hanoi es

$$t(m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = 0 \\ 2t(m-1) + 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esto se puede reescribir como

$$t(m) - 2t(m-1) = 1, \tag{9}$$

la cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 1$ y $p(n) = 1$, un polinomio de grado 0. Por lo tanto su polinomio característico es

$$(x-2)(x-1)$$

donde el factor $(x-2)$ proviene del lado izquierdo de la Ecuación (9) y el factor $(x-1)$ del lado derecho.

Ejemplo 3 II

Las raíces de este polinomio son 1 y 2, ambos de multiplicidad 1, por lo que todas las soluciones de esta recurrencia son de la forma

$$t(m) = c_1 1^m + c_2 2^m. \tag{10}$$

Ejemplo 3 II

Las raíces de este polinomio son 1 y 2, ambos de multiplicidad 1, por lo que todas las soluciones de esta recurrencia son de la forma

$$t(m) = c_1 1^m + c_2 2^m. \tag{10}$$

Necesitamos dos condiciones iniciales para determinar las constantes c_1 y c_2. Sabemos que $t(0) = 0$; para encontrar la segunda condición inicial usamos la recurrencia misma para calcular

$$t(1) = 2t(0) + 1 = 1.$$

Ejemplo 3 III

Esto nos da dos ecuaciones lineales con las constantes desconocidas.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \quad m = 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 1 \quad m = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 3 III

Esto nos da dos ecuaciones lineales con las constantes desconocidas.

$$c_1 + c_2 = 0 \quad m = 0$$
$$c_1 + 2c_2 = 1 \quad m = 1$$

De donde obtenemos las soluciones $c_1 = -1$ y $c_2 = 1$ y por lo tanto

$$t(m) = 2^m - 1$$

Ejemplo 3 IV

- Si todo lo que queremos es determinar el orden exacto de $t(m)$, no es necesario calcular las constantes de la Ecuación (10).

Ejemplo 3 IV

- Esta vez ni siquiera necesitamos sustituir la Ecuación (10) en la recurrencia original.

Ejemplo 3 IV

- Saber que $t(m) = c_1 + c_2 2^m$ es suficiente para concluir que $c_2 > 0$ y, por tanto, $t(m) \in \Theta(2^m)$.

Ejemplo 3 IV

- Para esto, tenga en cuenta que $t(m)$, el número de movimientos requeridos por un anillo, ciertamente no es negativo ni constante, ya que claramente $t(m) \geq m$.

Ejemplo 4 I

Ejemplo 4

Considere la recurrencia

$$t_n = 2t_{n-1} + n$$

Ejemplo 4 I

Ejemplo 4

Considere la recurrencia

$$t_n = 2t_{n-1} + n$$

Se puede reescribir como

$$t_n - 2t_{n-1} = n$$

la cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 1$ y $p(n) = n$, un polinomio de grado 1.

Ejemplo 4

Considere la recurrencia

$$t_n = 2t_{n-1} + n$$

Se puede reescribir como

$$t_n - 2t_{n-1} = n$$

la cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 1$ y $p(n) = n$, un polinomio de grado 1.
Así, su polinomio característico es

$$(x-2)(x-1)^2$$

con raíces 2 (de multiplicidad 1) y 1 (de multiplicidad 2).

Ejemplo 4 I

Ejemplo 4

Considere la recurrencia

$$t_n = 2t_{n-1} + n$$

Se puede reescribir como

$$t_n - 2t_{n-1} = n$$

la cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 1$ y $p(n) = n$, un polinomio de grado 1.
Así, su polinomio característico es

$$(x-2)(x-1)^2$$

con raíces 2 (de multiplicidad 1) y 1 (de multiplicidad 2).
Por lo tanto todas las soluciones son de la forma

$$t_n = c_1 2^n + c_2 1^n + c_3 n 1^n. \tag{11}$$

Ejemplo 4 II

Siempre que $t_0 \geq 0$, y por lo tanto $t_n \geq 0$ para todo n, concluimos inmediatamente que $t_n \in O(2^n)$.

Ejemplo 4 II

Siempre que $t_0 \geq 0$, y por lo tanto $t_n \geq 0$ para todo n, concluimos inmediatamente que $t_n \in O(2^n)$.
Pero se requiere un análisis más detallado para afirmar que $t_n \in \Theta(2^n)$.

Ejemplo 4 II

Siempre que $t_0 \geq 0$, y por lo tanto $t_n \geq 0$ para todo n, concluimos inmediatamente que $t_n \in O(2^n)$.
Pero se requiere un análisis más detallado para afirmar que $t_n \in \Theta(2^n)$.
Si sustituimos la Ecuación (11) en la recurrencia original, obtenemos

$$
\begin{aligned}
n &= t_n - 2t_{n-1} \\
&= (c_1 2^n + c_2 + c_3 n) - 2(c_1 2^{n-1} + c_2 + c_3(n-1)) \\
&= (2c_3 - c_2) - c_3 n
\end{aligned}
$$

Ejemplo 4 II

Siempre que $t_0 \geq 0$, y por lo tanto $t_n \geq 0$ para todo n, concluimos inmediatamente que $t_n \in O(2^n)$.
Pero se requiere un análisis más detallado para afirmar que $t_n \in \Theta(2^n)$.
Si sustituimos la Ecuación (11) en la recurrencia original, obtenemos

$$\begin{aligned} n &= t_n - 2t_{n-1} \\ &= (c_1 2^n + c_2 + c_3 n) - 2(c_1 2^{n-1} + c_2 + c_3(n-1)) \\ &= (2c_3 - c_2) - c_3 n \end{aligned}$$

de donde leemos directamente que $2c_3 - c_2 = 0$ y $-c_3 = 1$, independientemente de la condición inicial.

Ejemplo 4 II

Siempre que $t_0 \geq 0$, y por lo tanto $t_n \geq 0$ para todo n, concluimos inmediatamente que $t_n \in O(2^n)$.
Pero se requiere un análisis más detallado para afirmar que $t_n \in \Theta(2^n)$.
Si sustituimos la Ecuación (11) en la recurrencia original, obtenemos

$$\begin{aligned} n &= t_n - 2t_{n-1} \\ &= (c_1 2^n + c_2 + c_3 n) - 2(c_1 2^{n-1} + c_2 + c_3(n-1)) \\ &= (2c_3 - c_2) - c_3 n \end{aligned}$$

de donde leemos directamente que $2c_3 - c_2 = 0$ y $-c_3 = 1$, independientemente de la condición inicial.
Esto implica que $c_3 = -1$ y $c_2 = -2$.

Ejemplo 4 III

- Al principio estamos decepcionados porque es c_1 lo que es relevante para determinar el orden exacto de t_n como lo indica la ecuación (11), y en su lugar obtuvimos las otras dos constantes.

Ejemplo 4 III

- Sin embargo, esas constantes convierten la Ecuación (11) en

$$t_n = c_1 2^n - n - 2. \tag{12}$$

Ejemplo 4 III

- Siempre que $t_0 \geq 0$, y por lo tanto $t_n \geq 0$ para todo n, la Ecuación (12) implica que c_1 debe ser estrictamente positivo.

Ejemplo 4 III

- Por lo tanto, tenemos derecho a concluir que $t_n \in \Theta(2^n)$ sin necesidad de resolver explícitamente para c_1.

Ejemplo 4 III

- Por supuesto, c_1 ahora se puede obtener fácilmente a partir de la condición inicial si así se desea.

Ejemplo 4 IV

- Alternativamente, las tres constantes se pueden determinar como funciones de t_0 estableciendo y resolviendo el sistema apropiado de ecuaciones lineales obtenido de la Ecuación (11) y los valores de t_1 y t_2 calculados a partir de la recurrencia original.

Ejemplo 4 IV

- A estas alturas, puede estar convencido de que, para todos los propósitos prácticos, no hay necesidad de preocuparse por las constantes: el orden exacto de t_n siempre se puede leer directamente de la solución general. ¡Incorrecto!

Ejemplo 4 IV

- O tal vez piense que las constantes obtenidas por la técnica más simple de sustituir la solución general en la recurrencia original son siempre suficientes para determinar su orden exacto. ¡Nuevamente incorrecto!

Ejemplo 4 IV

- Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5 I

Ejemplo 5

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 4t_{n-1} - 2^n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 5 I

Ejemplo 5

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 4t_{n-1} - 2^n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero reescribimos la recurrencia.

$$t_n - 4t_{n-1} = -2^n$$

la cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 2$ y $p(n) = -1$, un polinomio de grado 0.

Ejemplo 5 I

Ejemplo 5

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 4t_{n-1} - 2^n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero reescribimos la recurrencia.

$$t_n - 4t_{n-1} = -2^n$$

la cual es de la forma de la Ecuación (1) con $b = 2$ y $p(n) = -1$, un polinomio de grado 0.
Su polinomio característico es

$$(x-4)(x-2)$$

con raíces 4 y 2, ambas de multiplicidad 1.

Ejemplo 5 II

Por lo tanto todas las soluciones son de la forma

$$t_n = c_1 4^n + c_2 2^n. \tag{13}$$

Ejemplo 5 II

Por lo tanto todas las soluciones son de la forma

$$t_n = c_1 4^n + c_2 2^n. \tag{13}$$

Puede sentirse tentado a afirmar sin más preámbulos que $t_n \in \Theta(4^n)$ ya que ese es claramente el término dominante en la Ecuación (13).

Ejemplo 5 II

Por lo tanto todas las soluciones son de la forma

$$t_n = c_1 4^n + c_2 2^n. \tag{13}$$

Puede sentirse tentado a afirmar sin más preámbulos que $t_n \in \Theta(4^n)$ ya que ese es claramente el término dominante en la Ecuación (13).
Si no tiene prisa, es posible que desee sustituir la Ecuación (13) en la recurrencia original para ver qué sale.

$$\begin{aligned} -2^n &= t_n - 4t_{n-1} \\ &= c_1 4^n + c_2 2^n - 4(c_1 4^{n-1} + c_2 2^{n-1}) \\ &= -c_2 2^n \end{aligned}$$

Ejemplo 5 II

Por lo tanto todas las soluciones son de la forma

$$t_n = c_1 4^n + c_2 2^n. \tag{13}$$

Puede sentirse tentado a afirmar sin más preámbulos que $t_n \in \Theta(4^n)$ ya que ese es claramente el término dominante en la Ecuación (13).
Si no tiene prisa, es posible que desee sustituir la Ecuación (13) en la recurrencia original para ver qué sale.

$$\begin{aligned} -2^n &= t_n - 4t_{n-1} \\ &= c_1 4^n + c_2 2^n - 4(c_1 4^{n-1} + c_2 2^{n-1}) \\ &= -c_2 2^n \end{aligned}$$

Por tanto, $c_2 = 1$ independientemente de la condición inicial.

Ejemplo 5 III

- El conocimiento de c_2 no es directamente relevante para determinar el orden exacto de t_n, como lo indica la Ecuación (13).

Ejemplo 5 III

- Sin embargo, a diferencia del ejemplo anterior, no se puede afirmar nada concluyente sobre c_1 por el mero hecho de que c_2 sea positivo.

Ejemplo 5 III

- Incluso si hubiéramos encontrado que c_2 es negativo, todavía no podríamos concluir inmediatamente nada con respecto a c_1 porque esta vez no hay ninguna razón obvia para creer que t_n deba ser positivo.

Ejemplo 5 III

- Habiendo fallado todo lo demás, nos vemos obligados a determinar todas las constantes.

Ejemplo 5 IV

- Podríamos establecer el sistema habitual de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas obtenidas de la Ecuación (13) y los valores de t_0 y t_1,

Ejemplo 5 IV

- pero ¿por qué desechar el conocimiento que ya hemos adquirido sobre el valor de c_2?

Ejemplo 5 IV

- Sabemos que $t_n = c_1 4^n + 2^n$.

Ejemplo 5 IV

- Sustituyendo la condición inicial $t_0 = 1$ da como resultado $1 = c_1 + 1$ y por lo tanto $c_1 = 0$.

Ejemplo 5 IV

- La conclusión es que la solución exacta para la recurrencia es simplemente $t_n = 2^n$, y que la afirmación anterior de que $t_n \in \Theta(4^n)$ ¡era incorrecta!

Ejemplo 5 V

- Sin embargo, tenga en cuenta que t_n estaría en $\Theta(4^n)$ si se especificara cualquier valor mayor de t_0 como condición inicial, ya que en general $c_1 = t_0 - 1$.

Ejemplo 5 V

- Por otro lado, con una condición inicial $t_0 < 1$, t_n toma valores negativos que crecen exponencialmente rápido.

Ejemplo 5 V

- Este ejemplo ilustra la importancia de la condición inicial para algunas recurrencias, mientras que los ejemplos anteriores habían demostrado que el comportamiento asintótico de muchas recurrencias no se ve afectado por la condición inicial, al menos cuando $t_0 \geq 0$.

Una última generalización

Una generalización adicional del mismo tipo de argumento nos permite finalmente resolver recurrencias de la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \cdots \tag{14}$$

Una última generalización

Una generalización adicional del mismo tipo de argumento nos permite finalmente resolver recurrencias de la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \cdots \tag{14}$$

donde las b_i son constantes distintas y $p_i(n)$ son polinomios en n respectivamente de grado d_i.

Una última generalización

Una generalización adicional del mismo tipo de argumento nos permite finalmente resolver recurrencias de la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \cdots \qquad (14)$$

donde las b_i son constantes distintas y $p_i(n)$ son polinomios en n respectivamente de grado d_i. Dichas recurrencias se resuelven utilizando el siguiente polinomio característico:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x - b_1)^{d_1+1}(x - b_2)^{d_2+1} \cdots ,$$

Una última generalización

Una generalización adicional del mismo tipo de argumento nos permite finalmente resolver recurrencias de la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \cdots \tag{14}$$

donde las b_i son constantes distintas y $p_i(n)$ son polinomios en n respectivamente de grado d_i. Dichas recurrencias se resuelven utilizando el siguiente polinomio característico:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x - b_1)^{d_1+1}(x - b_2)^{d_2+1} \cdots ,$$

que contiene un factor correspondiente al lado izquierdo y un factor correspondiente a cada término del lado derecho.

Una última generalización

Una generalización adicional del mismo tipo de argumento nos permite finalmente resolver recurrencias de la forma

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \cdots + a_k t_{n-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \cdots \tag{14}$$

donde las b_i son constantes distintas y $p_i(n)$ son polinomios en n respectivamente de grado d_i. Dichas recurrencias se resuelven utilizando el siguiente polinomio característico:

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x - b_1)^{d_1+1}(x - b_2)^{d_2+1} \cdots ,$$

que contiene un factor correspondiente al lado izquierdo y un factor correspondiente a cada término del lado derecho.

Una vez obtenido el polinomio característico, la recurrencia se resuelve como antes.

Ejemplo 6 I

Ejemplo 6

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2t_{n-1} + n + 2^n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 6 I

Ejemplo 6

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2t_{n-1} + n + 2^n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero reescriba la recurrencia como

$$t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n,$$

Ejemplo 6 I

Ejemplo 6

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2t_{n-1} + n + 2^n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero reescriba la recurrencia como

$$t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n,$$

que tiene la forma de la Ecuación (14) con $b_1 = 1, p_1(n) = n, b_2 = 2$ y $p_2(n) = 1$. El grado de $p_1(n)$ es $d_1 = 1$ y el grado de $p_2(n)$ es $d_2 = 0$.

Ejemplo 6 I

Ejemplo 6

Considere la recurrencia

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2t_{n-1} + n + 2^n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Primero reescriba la recurrencia como

$$t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n,$$

que tiene la forma de la Ecuación (14) con $b_1 = 1, p_1(n) = n, b_2 = 2$ y $p_2(n) = 1$. El grado de $p_1(n)$ es $d_1 = 1$ y el grado de $p_2(n)$ es $d_2 = 0$. Su polinomio característico es

$$(x-2)(x-1)^2(x-2),$$

que tiene raíces 1 y 2, ambas de multiplicidad 2.

Ejemplo 6 II

Todas las soluciones de la recurrencia tienen, por tanto, la forma

$$t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n. \tag{15}$$

Ejemplo 6 II

Todas las soluciones de la recurrencia tienen, por tanto, la forma

$$t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n. \tag{15}$$

Concluimos de esta ecuación que $t_n \in O(n2^n)$ sin calcular las constantes, pero necesitamos saber si $c_4 > 0$ para determinar el orden exacto de t_n.

Ejemplo 6 II

Todas las soluciones de la recurrencia tienen, por tanto, la forma

$$t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n. \tag{15}$$

Concluimos de esta ecuación que $t_n \in O(n2^n)$ sin calcular las constantes, pero necesitamos saber si $c_4 > 0$ para determinar el orden exacto de t_n.

Para esto, sustituya la Ecuación 15 en la recurrencia original, que da

$$n + 2^n = (2c_2 - c_1) - c_2 n + c_4 2^n.$$

Ejemplo 6 II

Todas las soluciones de la recurrencia tienen, por tanto, la forma

$$t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n. \tag{15}$$

Concluimos de esta ecuación que $t_n \in O(n2^n)$ sin calcular las constantes, pero necesitamos saber si $c_4 > 0$ para determinar el orden exacto de t_n.

Para esto, sustituya la Ecuación 15 en la recurrencia original, que da

$$n + 2^n = (2c_2 - c_1) - c_2 n + c_4 2^n.$$

Al igualar los coeficientes de 2^n, obtenemos inmediatamente que $c_4 = 1$ y, por lo tanto, $t_n \in \Theta(n2^n)$.

Ejemplo 6 II

Todas las soluciones de la recurrencia tienen, por tanto, la forma

$$t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n. \tag{15}$$

Concluimos de esta ecuación que $t_n \in O(n2^n)$ sin calcular las constantes, pero necesitamos saber si $c_4 > 0$ para determinar el orden exacto de t_n.

Para esto, sustituya la Ecuación 15 en la recurrencia original, que da

$$n + 2^n = (2c_2 - c_1) - c_2 n + c_4 2^n.$$

Al igualar los coeficientes de 2^n, obtenemos inmediatamente que $c_4 = 1$ y, por lo tanto, $t_n \in \Theta(n2^n)$.

Las constantes c_1 y c_2 son igualmente fáciles de leer si se desea.

Ejemplo 6 II

Todas las soluciones de la recurrencia tienen, por tanto, la forma

$$t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n. \tag{15}$$

Concluimos de esta ecuación que $t_n \in O(n2^n)$ sin calcular las constantes, pero necesitamos saber si $c_4 > 0$ para determinar el orden exacto de t_n.

Para esto, sustituya la Ecuación 15 en la recurrencia original, que da

$$n + 2^n = (2c_2 - c_1) - c_2 n + c_4 2^n.$$

Al igualar los coeficientes de 2^n, obtenemos inmediatamente que $c_4 = 1$ y, por lo tanto, $t_n \in \Theta(n2^n)$.

Las constantes c_1 y c_2 son igualmente fáciles de leer si se desea.

La constante c_3 puede obtenerse de la ecuación (15), el valor de las otras constantes, y la condición inicial $t_0 = 0$.

Ejemplo 6 III

Alternativamente, las cuatro constantes se pueden determinar resolviendo cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.

Ejemplo 6 III

Como necesitamos cuatro ecuaciones y solo tenemos una condición inicial, usamos la recurrencia para calcular el valor de otros tres puntos:
$t_1 = 3, t_2 = 12$ y $t_3 = 35$.

Ejemplo 6 III

Como necesitamos cuatro ecuaciones y solo tenemos una condición inicial, usamos la recurrencia para calcular el valor de otros tres puntos: $t_1 = 3, t_2 = 12$ y $t_3 = 35$.

Esto da lugar al siguiente sistema.

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 && n = 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 &= 3 && n = 1 \\ c_2 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 &= 12 && n = 2 \\ c_1 + 3c_2 + 8c_3 + 24c_4 &= 35 && n = 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 6 III

Como necesitamos cuatro ecuaciones y solo tenemos una condición inicial, usamos la recurrencia para calcular el valor de otros tres puntos:
$t_1 = 3, t_2 = 12$ y $t_3 = 35$.

Esto da lugar al siguiente sistema.

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 & n &= 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 &= 3 & n &= 1 \\ c_2 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 &= 12 & n &= 2 \\ c_1 + 3c_2 + 8c_3 + 24c_4 &= 35 & n &= 3 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema se obtiene $c_1 = -2, c_2 = -1, c_3 = 2$ y $c_4 = 1$.

Ejemplo 6 III

Como necesitamos cuatro ecuaciones y solo tenemos una condición inicial, usamos la recurrencia para calcular el valor de otros tres puntos:
$t_1 = 3, t_2 = 12$ y $t_3 = 35$.

Esto da lugar al siguiente sistema.

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0 & n &= 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 &= 3 & n &= 1 \\ c_2 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 &= 12 & n &= 2 \\ c_1 + 3c_2 + 8c_3 + 24c_4 &= 35 & n &= 3 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema se obtiene $c_1 = -2, c_2 = -1, c_3 = 2$ y $c_4 = 1$.

Por lo tanto, finalmente obtenemos

$$t_n = n2^n + 2^{n+1} - n - 2.$$

Ejercicios I

Resuelva las siguientes recurrencias exactamente con y sin manipulación algebraica.

1. $$t_n = \begin{cases} n+1 & \text{si } n=0 \text{ o } n=1 \\ 3t_{n-1} - 2t_{n-2} + 3\cdot 2^{n-2} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. $$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n=0 \text{ o } n=1 \\ T(n-1) + T(n-2) + c & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3. $$T(n) = \begin{cases} a & \text{si } n=0 \text{ o } n=1 \\ T(n-1) + T(n-2) + cn & \text{en otro caso} \end{cases}$$

4. $a_n = a_{n-1} + n + 2, a_0 = 0$
5. $a_n = a_{n-1} + 7n, a_0 = 0$